مفاهيم وقوانين

الهندسة الفراغية

الصف الثالث الثانوى

إهداء من منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

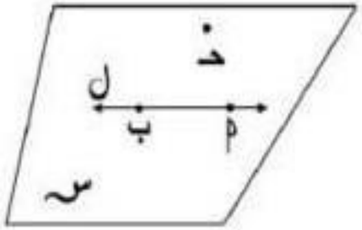
المستقيمات و المستويات

مفاهيم و مسلمات

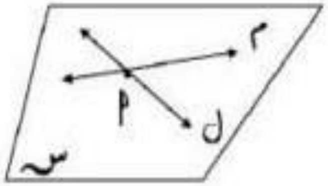
- يتعين المستقيم تماماً بأى نقطتين مختلفتين
- كل ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة يمر بها مستو واحد و واحد فقط
- إذا أشترك مستقيم و مستو فى نقطتين مختلفتين فإن المستقيم يقع بأكمله فى المستوى
- أى نقطة فى المستوى يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات
- أى مستقيم فى الفراغ يمر به عدد لا نهائى من المستويات
- أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات

حالات تعيين المستوى

(١) مستقيم و نقطة خارجه



(٢) مستقيمان متقاطعان



(٣) ثلاث نقاط ليست على إستقامة واحدة

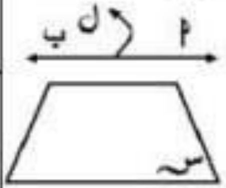
نتيجة: إذا إشترك مستويان فى ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة فإنهما ينطبقان

تابع : المستقيمات و المستويات

الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات فى الفراغ

علاقة مستقيم بمستوى

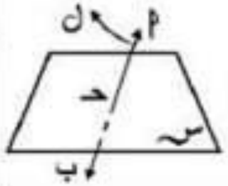
(١) المستقيم يوازى المستوى :



ل // س

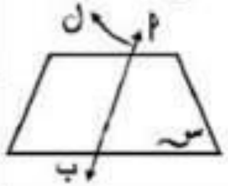
∴ ل ∩ س = ∅

(٢) المستقيم يقطع المستوى :



ل ∩ س = { جـ }

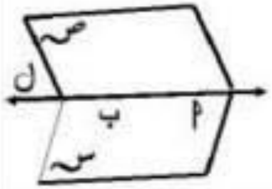
(٣) المستقيم يقع بتمامه فى المستوى :



ل ∩ س = ل

علاقة مستوى بمستو

(١) المستويان يتقاطعان :

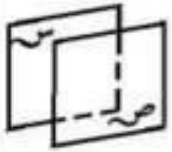


س ∩ ص = ل

(٢) المستويان يتطابقان :

س = ص

(٣) المستويان متوازيان :

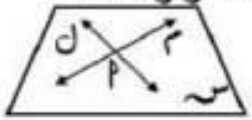


س ∩ ص = ∅

حقيقة ← المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان

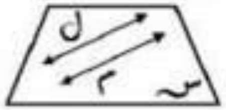
علاقة مستقيم بمستقيم

(١) المستقيمان يتقاطعان فى نقطة :
" و يقعان فى مستو واحد "



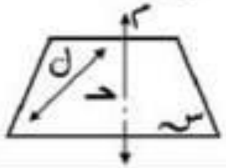
ل ∩ م = { أ }

(٢) المستقيمان متوازيان
" و يقعان فى مستو واحد "



ل ∩ م = ∅

(٣) المستقيمان متخالفان :
" لا يقعان فى مستو واحد "



ل ∩ م = ∅

تابع : المستقيمات و المستويات

مفاهيم و مسلمات

- إذا أشترك مستقيم مع مستوى في نقطتين مختلفتين فإن المستقيم يقع فى المستوى
- من الممكن أن يقع المستقيم فى عدد لا نهائى من المستويات المختلفة
- إذا وقعت نقطة فى مستويين مختلفين فإنها تقع على خط تقاطعهما
- إذا وقع مستقيم فى أكثر من مستوى فإن هذا المستقيم هو خط تقاطع هذه المستويات
- إذا توازى مستويان فإن أى مستقيم يقع فى أحدهما يكون موازياً للمستوى الآخر
- إذا توازى مستويان فإن أى مستقيم يقع فى أحدهما لا يلاقى أى مستقيم يقع فى المستوى الآخر
- إذا توازى المستويان س ، ص و كان ل$_1$ ⊂ س ، ل$_2$ ⊂ ص فإن ل$_1$ إما أن يوازى ل$_2$ أو يخالفه

توازى مستقيمين

يتوازى المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ إذا و فقط إذا كان :

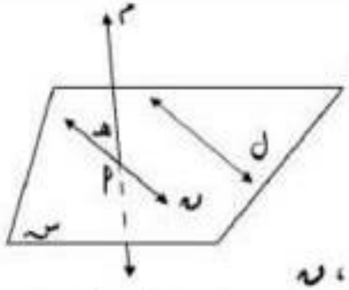
(١) يجمعهما مستوى واحد

(٢) ل$_1$ ∩ ل$_2$ = ∅

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

هى إحدى الزوايا التى يصنعها أحدهما مع أى مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازياً للآخر

فى الشكل المقابل :



ل ، م مستقيمان متخالفان

، أ ∈ م

، ل // ن

، ل ∩ ن = { أ }

، ∠ هـ هى الزاوية بين م ، ن

∴ ∠ هـ هى الزاوية بين المستقيمين المتخالفين ل ، م

ملاحظة

إذا كانت الزاوية بين مستقيمين متخالفين قائمة فإن هذان المستقيمان يكونان متعامدين

بعض المجسمات

المنشور

تعريف

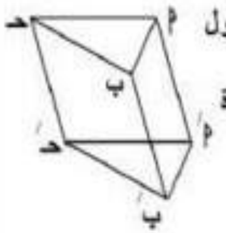
هو الجسم المتولد من إنتقال سطح مضلع موازيـاً لنفسه فى إتجاه ثابت و يسمى سطح المضلع فى كل من وضعه الأول و الأخير قاعدة المنشور

خواصه

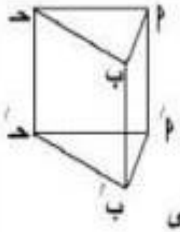
- قاعدتا المنشور متطابقتين و متوازيتين
- الأحرف الجانبية متوازية و متساوية فى الطول
- الأوجه الجانبية هى سطوح متوازيات اضلاع إذا كان المنشور مائل ، سطوح مستطيلات إذا كان المنشور قائم
- إرتفاع المنشور هو طول البعد العمودى بين قاعدتيه
- إرتفاع المنشور القائم يساوى طول حرفه الجانبى
- يسمى المنشور حسب عدد أضلاع قاعدته " ثلاثى ، رباعى ، ...
- المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة × الإرتفاع
- المساحة الكلية للمنشور = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة
- حجم المنشور = مساحة القاعدة × الإرتفاع

أنواعه

* المنشور المائل :
* الأحرف الجانبية متساوية فى الطول و متوازية
* الأحرف الجانبية مائلة على القاعدة
* الأوجه الجانبية متوازيات أضلاع
* إرتفاع المنشور المائل هو البعد العمودى بين القاعدتين



* المنشور القائم :
* الأحرف الجانبية متساوية فى الطول و متوازية
* الأحرف الجانبية عمودية على القاعدة
* الأوجه الجانبية مستطيلات
* إرتفاع المنشور المائل = الحرف الجانبى

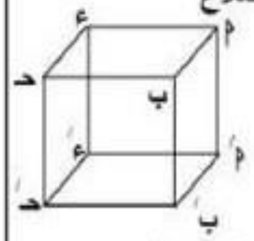


حالاته الخاصة

متوازى السطوح

هو منشور كل من قاعدتيه سطح متوازى أضلاع

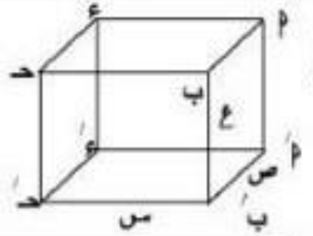
* أحرفه الجانبية عمودية على مستوى قاعدتيه أى أن أوجهه الجانبية سطوح مستطيلات إذا كان قائم ، إذا كان مائلا فإن الأوجه الجانبية سطوح متوازيات أضلاع
* قطره : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين ليسا فى وجه واحد ، عدد أقطاره = ٤



تابع الحالات الخاصة للمنشور

متوازى المستطيلات

هو منشور قائم كل من قاعدتيه سطح مستطيل

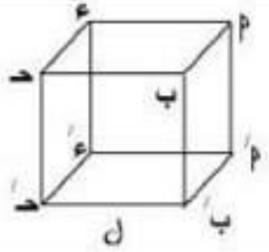


خواصه

متوازى المستطيلات له ستة أوجه كل منها سطح مستطيل ، عدد أحرفه ١٢
قد يكون لمتوازى السطوح وجهين منهما سطح مربع و باقى الأوجه سطوح مستطيلات
عدد أقطاره = ٤ ، و تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة هى منتصف كل منها
أبعاده هى : هى أطوال كل ثلاثة أحرف متلاقية فى رأس من رؤوسه إذا فرضنا أن أبعاده هى س ، ص ، ع وحدة طول فإن :
مساحته الجانبية = ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة
مساحته الكلية = ٢ (س ص + ص ع + ع س) وحدة مربعة
حجمه = س ص ع وحدة مكعبة
طول قطره = $\sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$

المكعب

هو متوازى مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة



خواصه

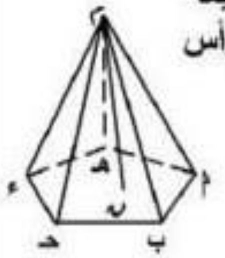
أوجه كل منها سطح مربع
إذا فرضنا أن طول حرفه = ل وحدة طول فإن :
طول قطر أى وجه = ل $\sqrt{٢}$ وحدة طول
طول قطره = ل $\sqrt{٣}$ وحدة طول
مساحة كل وجه = $ل^2$ وحدة مربعة
مساحته الجانبية = ٤ $ل^2$ وحدة مربعة
مساحته الكلية = ٦ $ل^2$ وحدة مربعة
حجمه = $ل^3$ وحدة مكعبة

تابع : بعض المجسمات

الهرم

تعريفه

هو إتحاد جميع القطع المستقيمة الواصلة من نقطة (تسمى رأس الهرم) " لا تنتمى إلى المستوى الذى يحوى سطح مضلع (يسمى قاعدة الهرم) "إلى نقطة تنتمى لقاعدة الهرم



خواصه

- يسمى حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته الهرم
- أحرفه الجانبية هى القطع المستقيمة الواصلة بين رأسه و رؤوس قاعدته
- أوجهه الجانبية هى سطوح المثلثات التى رأسها هى رأس الهرم و قواعدها هى أضلاع قاعدة الهرم و ضلاعها الآخران أحرف جانبية للهرم
- إرتفاع الهرم هو العمود الساقط من رأسه على مستوى قاعدته

حالاته الخاصة

الهرم القائم

هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم

خواصه

- قاعدته سطح مضلع منتظم " مثلث متساوى الأضلاع ، مربع ، خماسي منتظم ، ....
- إرتفاع الهرم يلاقى القاعدة عند مركزها
- جميع الأحرف الجانبية له متساوية فى الطول
- جميع الأوجه الجانبية له سطوح مثلثات متساوية الساقين و متطابقة
- إرتفاعاته الجانبية " إرتفاعات الأوجه الجانبية " متساوية فى الطول
- أحرفه الجانبية تميل على القاعدة بزوايا متساوية فى القياس
- أوجهه الجانبية تميل على القاعدة بزوايا متساوية فى القياس

الهرم المنتظم

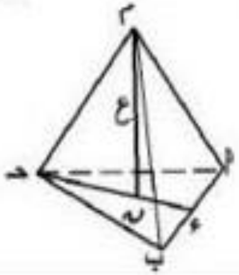
هو هرم ثلاثى تساوت أحرفه الستة
أو
هو هرم أوجهه الأربعة سطوح مثلثات متساوية أضلاع

تابع : بعض المجسمات

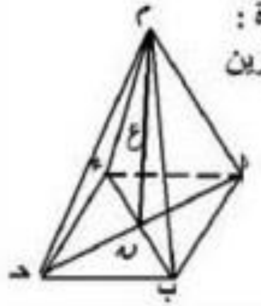
تابع : الهرم

بعض أنواع الهرم القائم

* هرم ثلاثى قائم :
* القاعدة : مثلث متساوى الأضلاع
* مركز القاعدة : نقطة تلاقى المتوسطات



* هرم رباعى قائم :
* القاعدة : مربع
* مركز القاعدة : نقطة تلاقى القطرين



الهرم الثلاثى المنتظم

إرتفاعه هو القطعة الواصلة بين رأسه و نقطة تلاقى متوسطات قاعدته

من الشكل إذا كان طول حرفه = ل نلاحظ :

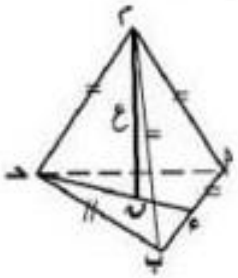
** حـ ء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

** ء ن = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

** حـ ن = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل

** ع = م ن = $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ل

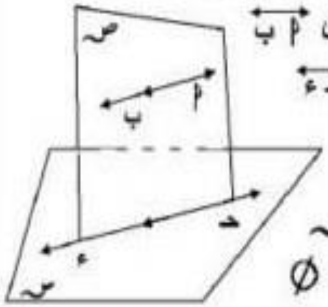
((٣ ع^2 = ٢ ل^2))



توازى مستقيم و مستو

نظرية

إذا وازى مستقيم مستوياً فإنه يوازى جميع المستقيمات التى تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التى تحتوى ذلك المستقيم



المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س

، ص أى مستوى يحتوى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

المطلوب : إثبات أن :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ س = ∅

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊂ س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = ∅

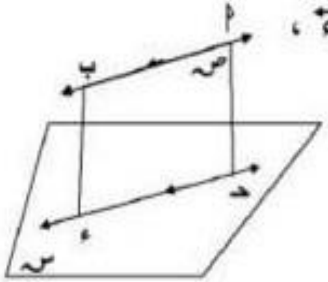
، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

يقعان في مستو واحد هو ص

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

نتائج و حقائق

إذا وازى مستقيم خارج مستو مستقيماً فى المستوى فإنه يوازى ذلك المستوى



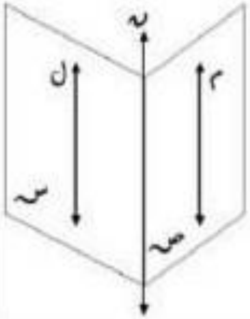
فإذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊂ س

، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊄ س

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // س

إذا توازى مستقيمين ومر بكل منهما مستوى وتقاطع المستويان كان خط تقاطعهما موازياً لهذين المستقيمين



إذا كان : ل // م

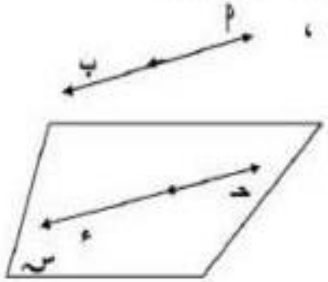
، ل ⊂ س

، م ⊂ ص

، س ∩ ص = ن

فإن : ن // ل // م

إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المار بأي نقطة من نقط هذا المستوى وموازيا للمستقيم المعلوم يقع بتمامه في هذا المستوى



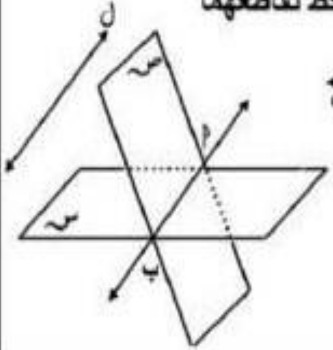
فإذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // س ،

حـ ∈ س

و رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊂ س

إذا وازى مستقيم كلاً من مستوين متقاطعين فإنه يوازى خط تقاطعهما



فإذا كان :

س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

، ل // س

، ل // ص

فإن : ل // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

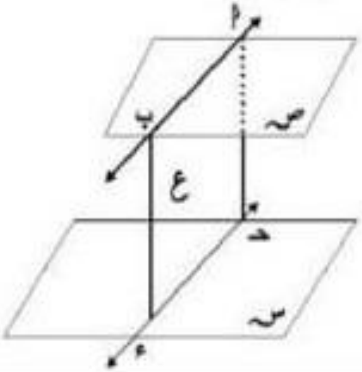
تابع : توازى مستقيم و مستو

تابع : نتائج و حقائق

إذا قطع مستو مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيين

فإذا كان : س // ص ، ع قاطع لهما فى ↔أ ب ، ↔جـ ء

فإن : ↔أ ب // ↔جـ ء



إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر

فإذا كان :س // ص ، ↔جـ ء يقطع س فى أ فإن : ↔جـ ء يقطع ص فى نقطة مثل ب

نظرية

إذا تقاطع مستقيمان في مستو وكان موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستو آخر كان مستو المستقيمين الأولين موازيا لمستوى المستقيمين الآخرين

بدون برهان

ملاحظة

لإثبات أن مستوى يوازى مستوى آخر : نثبت أن مستقيمين متقاطعين فى أحدما يوازيان مستقيمان متقاطعان فى الآخر

لإثبات أن مستقيم يوازى مستوى : نثبت أن المستقيم يوازى مستقيما فى المستوى
أو
أن هذا المستقيم يقع فى مستوى يوازى ذلك المستوى

تابع : توازى مستقيم و مستو

تمرين مشهور

نظرية طاليس في الفراغ

إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينها تكون متناسبة

المعطيات : س // ص // ع قطعها $ل_1$ فى أ ، ب ، حـ ، قطعها $ل_2$ فى ء ، هـ ، و على الترتيب

المطلوب : إثبات أن : $\frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$

العمل : نرسم $\overline{\text{أ و}}$ فيقطع ص فى { م }

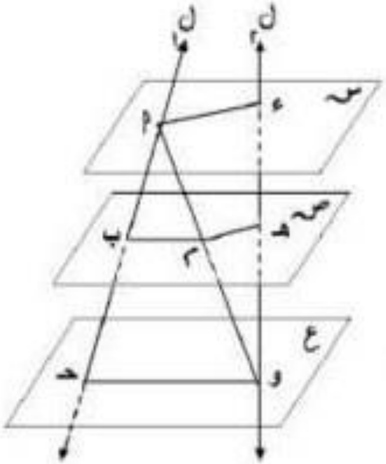
و نرسم $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{حـ و}}$

البرهان : ∵ المستوى أ حـ و قطع المستويين المتوازيين ص ، ع فى $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$ ، $\frac{\text{أ م}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$ (١)

بالمثل : $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ء أ}}$ ، $\frac{\text{أ م}}{\text{م و}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$



ملاحظات

إذا كان : أ ب = ب حـ
فإن : ء هـ = هـ و

إذا كان : $ل_1$ ، $ل_2$ غير متخالفان
فإن : النقط ب ، م ، هـ على إستقامة واحدة

يمكن كتابة التناسب بأكثر من طريقة مثل :

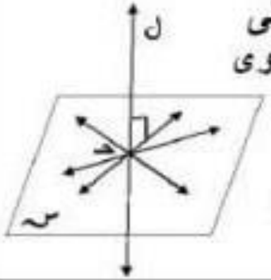
$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ء و}}$

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}}$ و هكذا

المستقيم العمودى على مستو

تعريف

هو المستقيم العمودى على كل مستقيم فى هذا المستوى

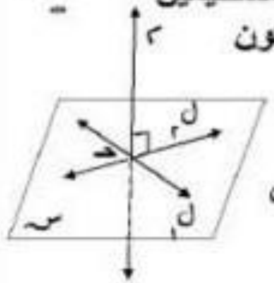


فإذا كان : ل ⊥ س~
فإن : ل عمودى على أى مستقيم واقع فى س~

نظرية

بدون برهان

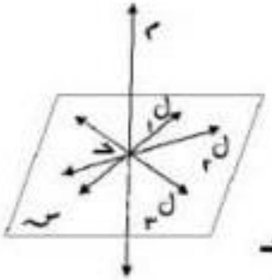
المستقيم العمودى على كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما



فإذا كان : ل١ ، ل٢ ⊂ س~
و يتقاطعان فى حـ ، م عمودى على كل منهما من نقطة حـ
فإن : م ⊥ س~

نتائج و ملاحظات

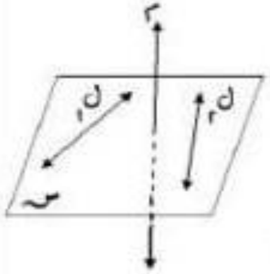
جميع الأعمدة المرسومة على مستقيم من نقطة عليه تقع فى مستوى واحد عمودى على هذا المستقيم



إذا كان : ل١ ، ل٢ ، ل٣ ، ... عمودية على م عند حـ
فإن : ل١ ، ل٢ ، ل٣ ، ... واقعة فى س~ العمودى على م

يوجد مستوى واحد و واحد فقط عمودى على مستقيم من نقطة عليه

المستقيم العمودى على كل من مستقيمين مستويين معاً و غير متوازيين يكون عمودياً على مستويهما



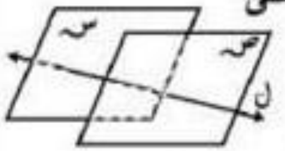
فإذا كان : ل١ ، ل٢ ⊂ س~
و غير متوازيين ، م عمودى على كل منهما فإن : م ⊥ س~

تابع : المستقيم العمودى على مستو

تابع : نتائج و ملاحظات

إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين

فإذا كان : ل ⊥ س ، ل ⊥ ص فإن : س // ص



و كذلك إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً على المستوى

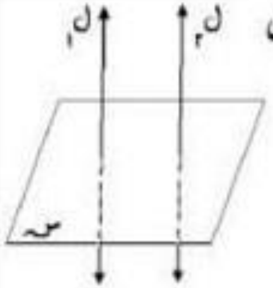
ملاحظة

لا يمكن رسم أكثر من مستو واحد يكون عمودياً على مستقيم معلوم و يمر بنقطة معلومة لا تنتمى لهذا المستقيم

المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان

فإذا كان : ل١ ⊥ س ، ل٢ ⊥ س

فإن : ل١ // ل٢



و بالعكس إذا توازى مستقيمان و كان أحدهما عمودى على مستو كان الآخر عمودياً عليه أيضاً

فإذا كان : ل١ // ل٢ ، ل١ ⊥ س

فإن : ل٢ ⊥ س

لإثبات أن مستقيم عمودى على مستوى :

نثبت أن هذا المستقيم عمودى على مستقيمين متقاطعين فى هذا المستوى

أو

نثبت أن هذا المستقيم يقع فى مستوى عمودى على هذا المستوى و يكون أيضاً عمودى على خط تقاطع المستويين

أو

نثبت أن هذا المستقيم هو خط تقاطع مستويين كل منهما عمودى على هذا المستوى

الإسقاط العمودى

تعريف

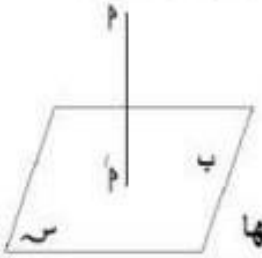
المسقط العمودى لنقطة معلومة على مستو معلوم هو موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة المعلومة على المستوى

إذا كانت $\overline{أأ'} \perp$ س

فإن : أ' مسقط أ على س

و إذا كانت ب $\in$ س

فإن : مسقطها على س هى نفسها



مسقط قطعة مستقيمة و مستقيم على مستو

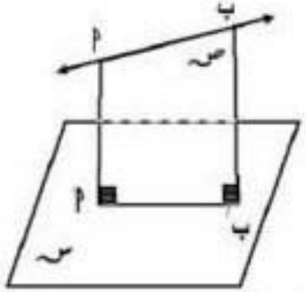
فى الشكل المقابل :

أ' مسقط أ على س ،

ب' مسقط ب على س

فتكون : $\overline{أ'ب'}$ مسقط $\overline{أب}$ على س

و يكون : $\overleftrightarrow{أ'ب'}$ مسقط $\overleftrightarrow{أب}$ على س



ملاحظة

$\overleftrightarrow{أأ'}$ // $\overleftrightarrow{بب'}$ (لأنهما عموديان على س)

∴ يعينان مستوياً تقع فيه $\overline{أب}$ ، مسقطها $\overline{أ'ب'}$

و يسمى مستوى الإسقاط

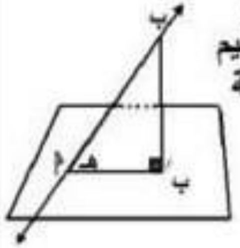
أما المستوى س فيسمى بمستوى المسقط

الزاوية بين مستقيم و مستو

الزاوية بين قطعة مستقيمة و مستو هى :

الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى

و هى الزاوية بين المستقيم الحامل للقطعة المستقيمة و المستوى و تسمى بزاوية ميل المستقيم على المستوى



فى الشكل المقابل :

$\angle$ هـ هى زاوية ميل $\overleftrightarrow{أب}$ على س

، و يكون : أ ب' = أ ب جتا هـ

حيث : ٠ $\leqslant$ هـ $<$ ٩٠°

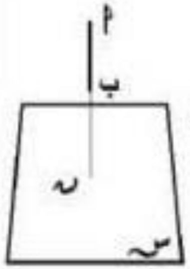
ملاحظة

لتعيين الزاوية بين مستقيم و مستوى :

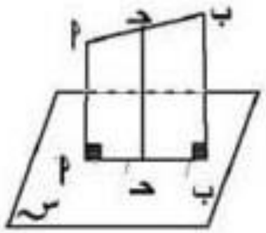
نرسم مسقط المستقيم على المستوى و نعين الزاوية بين المستقيم و مسقطه على هذا المستوى و نوجد قياسها بإستخدام إحدى الدوال المثلثية الأساسية لها

تابع : الإسقاط العمودى

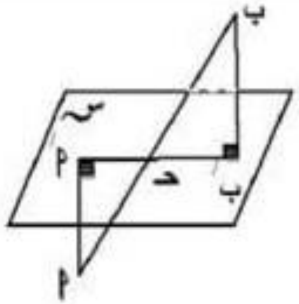
الأشكال المختلفة لمسقط قطعة مستقيمة على مستو



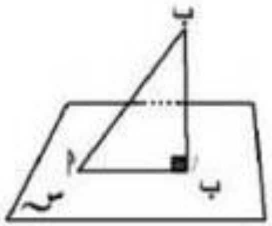
أ ب ⊥ س ، و يكون :
مسقطها النقطة أ و بالتالى :
ينطبق مسقط أ على مسقط ب
و يكون : أَ بَ = صفراً ،
ق (∠ هـ) = ٩٠°



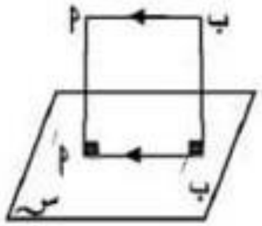
حـ ∈ أ ب ،
حـَ ∈ أَ بَ ،
فتكون : أَ بَ مسقط
أ ب على س ،
و يكون : أَ بَ < أ ب



أ ب تشترك مع س فى حـ
فتكون : أَ بَ مسقط أ ب
على س ، و يكون :
أَ حـ < أ حـ ، حـ بَ < حـ ب
و بالجمع ينتج : أَ بَ < أ ب



أ ب تشترك مع س فى أ
فتكون : أ بَ مسقط أ ب على س ،
و يكون : أ بَ < أ ب



أ ب // س فتكون : أَ بَ مسقط أ ب
على س ، و يكون : أَ بَ = أ ب ،
، و يكون : ق (∠ هـ) = ٠
، الشكل أ أَ بَ ب مستطيل

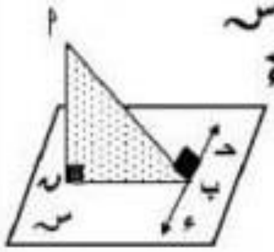
ملاحظة

من ذلك نلاحظ : أَ بَ ≤ أ ب أى أن :
طول مسقط قطعة مستقيمة على مستو أصغر من أو
يساوى طول هذه القطعة المستقيمة

تابع : الإسقاط العمودى

نظرية

إذا رسم مستقيم مائل على مستو و كان عمودياً على مستقيم فى المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عمودياً على هذا المستقيم



المعطيات : أن ⊥ المستوى س
، المائل أب ⊥ جـ ء
الواقع المستوى س

المطلوب : إثبات أن :
ب ن ⊥ جـ ء

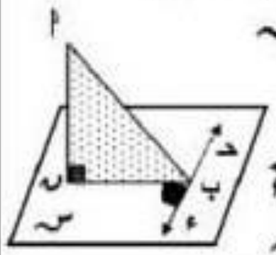
البرهان : ∵ أن ⊥ المستوى س
∴ أن ⊥ جـ ء الواقع فى المستوى س
، ∵ أب ⊥ جـ ء
∴ جـ ء ⊥ عمودى على كل من
أن ، أب
∴ جـ ء ⊥ مستويهما أ ن ب
∴ جـ ء ⊥ أى مستقيم فى المستوى أ ن ب
∴ جـ ء ⊥ ب ن

ملاحظة

يقال للمستقيمات أب ، ب ن ، جـ ء " الأعمدة الثلاثة "

عكس النظرية

إذا رسم مستقيم مائل على مستو و كان مسقطه على المستوى عمودياً على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً على ذلك المستقيم



المعطيات : أن ⊥ المستوى س
، أب مائل على المستوى س
، مسقطه ب ن ⊥ جـ ء
الواقع فى المستوى س

المطلوب : إثبات أن : أب ⊥ جـ ء

البرهان : ∵ أن ⊥ المستوى س
∴ أن ⊥ كل مستقيم فى المستوى س
∴ أن ⊥ جـ ء
، ∵ ب ن ⊥ جـ ء
∵ جـ ء ⊥ كل من أن ، ب ن
∴ جـ ء ⊥ مستويهما أ ن ب
∴ جـ ء ⊥ أى مستقيم يقع فى المستوى أ ن ب ∴ جـ ء ⊥ أب

تابع : الإسقاط العمودى

الزاوية الزوجية

هى إتحاد نصفى مستويين مع حدهما المشترك

فى الشكل المقابل :

س ، ص نصفى مستويين

، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ الحد المشترك لهما

فيكون :

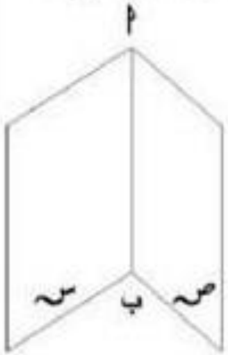
(س ∪ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∪ ص)

زاوية زوجية حرفها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

و إتحاد كل من نصفى

المستويين س ، ص

مع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يسمى وجهاً للزاوية الزوجية



تقرأ الزاوية الزوجية و تكتب بإحدى الصور :

الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ أو

الزاوية : س – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – ص أو

الزاوية : حـ – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – ء

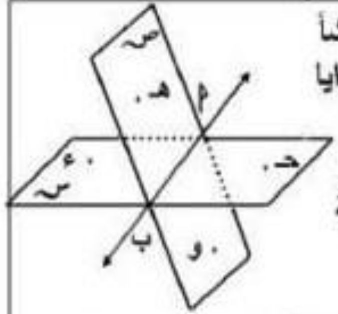
حيث : حـ ∈ س ، ء ∈ ص

الزوايا الزوجية الناتجة عن تقاطع مستويين

إذا تقاطع مستويان ينشأ عن تقاطعهما أربع زوايا زوجية منها

زوايا زوجية متجاورة

و زوايا زوجية متقابلة بالحرف



فى الشكل المقابل :

س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ الزوايا الزوجية

الأربعة هى : ∠ (حـ – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – هـ) ،

(حـ – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – و) ،

∠ (ء – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – هـ) ،

∠ (ء – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – و)

و كل منهما زاويتان زوجيتان متجاورتان

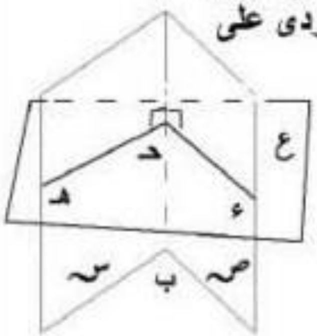
و تكون : ∠ (حـ – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – و) ،

∠ (ء – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – هـ)

زاويتان زوجيتان متقابلتان بالحرف

الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هى الزاوية التى تنشأ عن تقاطع الزاوية م الزوجية مع أى مستوى عمودى على حافتها (حرفها)



فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ،

المستوى ع ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

فتكون : ∠ هـ حـ ء زاوية مستوية للزاوية الزوجية

∠ (ء – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – هـ) و يكون :

$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

ملاحظات

جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية فى القياس
قياس الزاوية الزوجية هو قياس أى من زواياها المستوية
الزاوية الزوجية تكون : حادة أو قائمة أو منفرجة أو مستقيمة

تابع : الإسقاط العمودى

خطوات تعيين الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

(١) نأخذ أى نقطة على خط تقاطع المستويين

(٢) نرسم منها شعاعين كل منهما يقع فى أحد المستويين و كلاهما عمودى على خط تقاطع المستويين

(٣) الزاوية بين هذين المستقيمين هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية المطلوبة

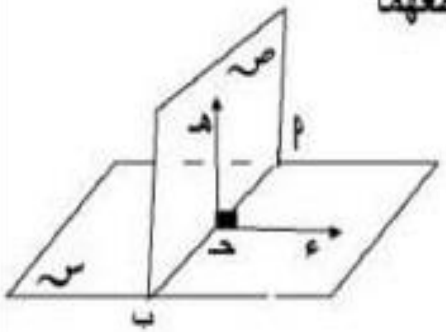
(٤) نوجد قياسها بإستخدام إحدى الدوال المثلثية الأساسية

المستويات المتعامدة

تعريف

يقال لمستويين متقاطعين أنهما متعامدان إذا نشأ عن تقاطعهما أربع زوايا زوجية قوائم

فى الشكل المقابل :



س ∩ ص = ↔أب ، جـ ∈ ↔أب

، هـ ∈ س ، ء ∈ ص

، ↔جـهـ ⊥ ↔أب ، ↔جـء ⊥ ↔أب

فتكون ∠ هـ جـ ء زاوية مستوية لإحدى الزوايا الزوجية الأربع الناشئة عن تقاطع المستويين س ، ص

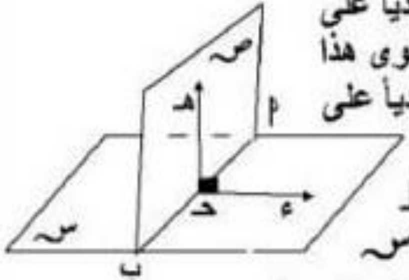
فإذا كان : ق (∠ هـ جـ ء) = ٩٠° فإن : س ⊥ ص

، و بالعكس إذا كان : س ⊥ ص فإن : ق (∠ هـ جـ ء) = ٩٠°

تابع : الإسقاط العمودى

نظرية

إذا كان مستقيم عمودياً على مستو فكل مستو يحوى هذا المستقيم يكون عمودياً على ذلك المستوى



المعطيات : حـه ⊥ المستوى س عند حـ ، المستوى ص يحوى حـه يقطع المستوى س فى أب

المطلوب : إثبات أن : ص ⊥ س

العمل : نرسم حـء ⊥ أب فى المستوى س

البرهان : ∵ حـه ⊥ المستوى س

∴ حـه ⊥ حـء الواقع فى المستوى س ∴ ق (∠ ء حـ هـ) = ٩٠°

∵ ∠ ء حـ هـ هى زاوية مستوية لإحدى الزوايا الزوجية الناتجة عن تقاطع المستويين س ، ص

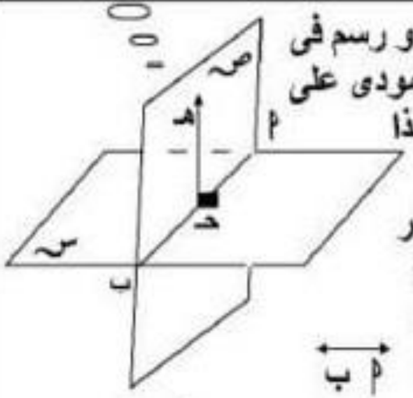
∴ ص ⊥ س

نظرية

بدون برهان

إذا تعامد مستويان و رسم فى أحدهما مستقيم عمودى على خط التقاطع كان هذا المستقيم عمودياً على المستوى الآخر

في الشكل المقابل :



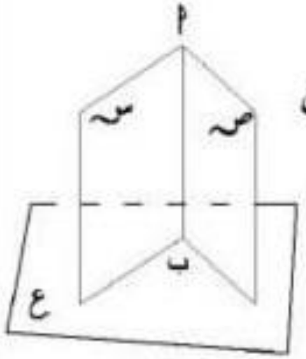
س ⊥ ص ، س ∩ ص = أب ، حـه ⊂ س ، حـه ⊥ أب

∴ حـه ⊥ س

حقيقة

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عمودياً على المستوى الثالث

في الشكل المقابل :



إذا كان : كل من المستويين س ، ص ⊥ ع ، س ∩ ص = أب

فإن : أب ⊥ ع

ملاحظة

لإثبات تعامد مستويين :

نثبت أن إحدى الزوايا الزوجية عند تقاطعهما قائمة

أو

نثب أن مستقيم فى أحدهما عمودى على المستوى الآخر